ARCE INCASTRATE

Inginer GH. EM. FILIPESCU
Profesor la Şcoala Politecnică Bucureşti

Metoda în general constă în aceia că în loc de a luà ca necunoscute împingerea orizontală, reacţiunea verticală şi momentul de incastrare din punctul A sau oricare alt punct aparţinând arcului, se iau ca necunoscute aceleaşi cantităţi însă aplicate într'un punct O, făcându-se ipoteza că cele două puncte O şi A sunt legate între ele prin o bară rigidă.

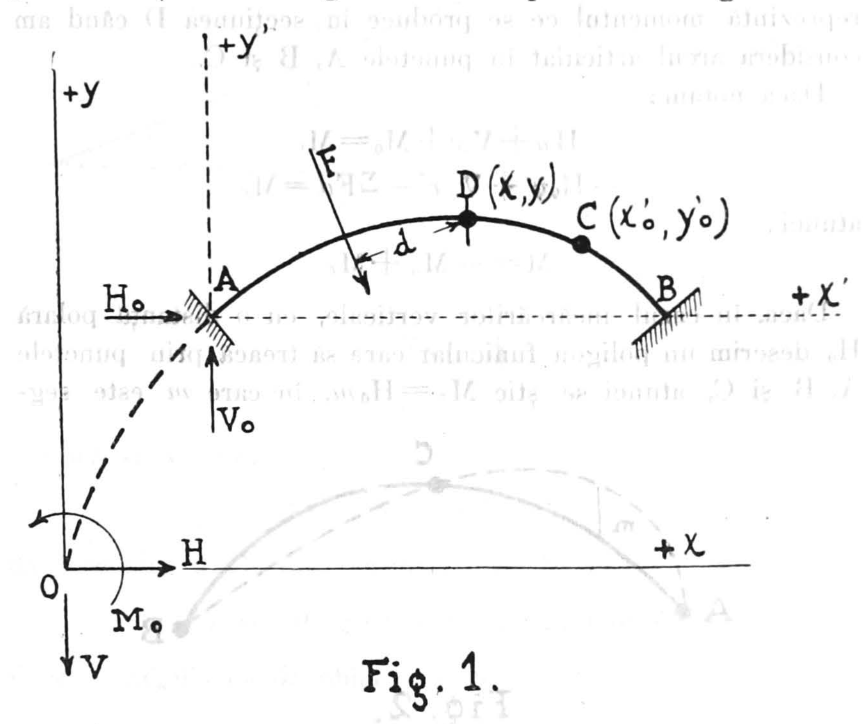


Fig. 1.

Expresia momentului în secţiunea D (x, y) va fi:

$$M = -Hy - Vx - M_0 - \Sigma F d.$$

In acest caz $\Sigma F d$ reprezintă momentul forţelor dela stânga secţiunii ca într'o grindă liberă în A şi incastrată în D. Acelaş lucru va fi şi pentru secţiunea B. Putem presupune în A aplicate două forţe H_0 şi V_0 ca în figură. In acest caz expresia momentului va fi:

$$M = -Hy - Vx - M_0 - H_0 y' + V_0 x' - \Sigma F d$$

în care x', y' sunt coordonatele aceluiaş punct D însă în raport cu axele $Ax'y'$ cari trec prin A şi B.

Acestor două forţe (H_0, V_0) arbitrar luate le putem impune două condiţii arbitrare.

Le impunem anume condiţia ca expresia:

$$-H_0 y' + V_0 x' - \Sigma F d = 0$$

pentru punctele B şi C, acesta din urmă arbitrar ales pe arc. In acest caz ultimii trei termeni din expresia momentului reprezintă momentul ce se produce în secţiunea D când am considera arcul articulat în punctele A, B şi C.

Dacă notăm:

$$Hy + Vx + M_0 = M_n$$
$$-H_0 y' + V_0 x' - \Sigma F d = M_x$$

atunci:

$$M = -M_n + M_x$$

Dacă, în cazul încărcărilor verticale, cu o distanţă polară H_0 descrim un poligon funicular care să treacă prin punctele A, B şi C, atunci se ştie $M_x = H_0 m$, în care m este seg-

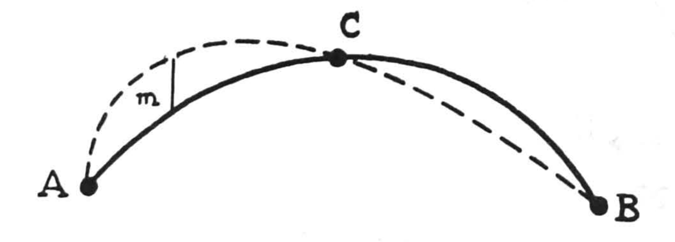


Fig. 2.

mentul coprins între poligonul funicular şi axa arcului. In definitiv expresia momentului putem să o punem sub forma:

$$M = -M_n + H_0 m.$$

Ca să găsim valoarea forței axiale N, ne servim de proiecția poligonului de forțe din secțiunea considerată care ne dă:

$$N = (H + H_0) \cos\varphi + (T_0 - V) \sin\varphi.$$

In aceste condiții să aplicăm teorema lui *Castigliano* pentru determinarea necunoscutelor H, V și M_0.

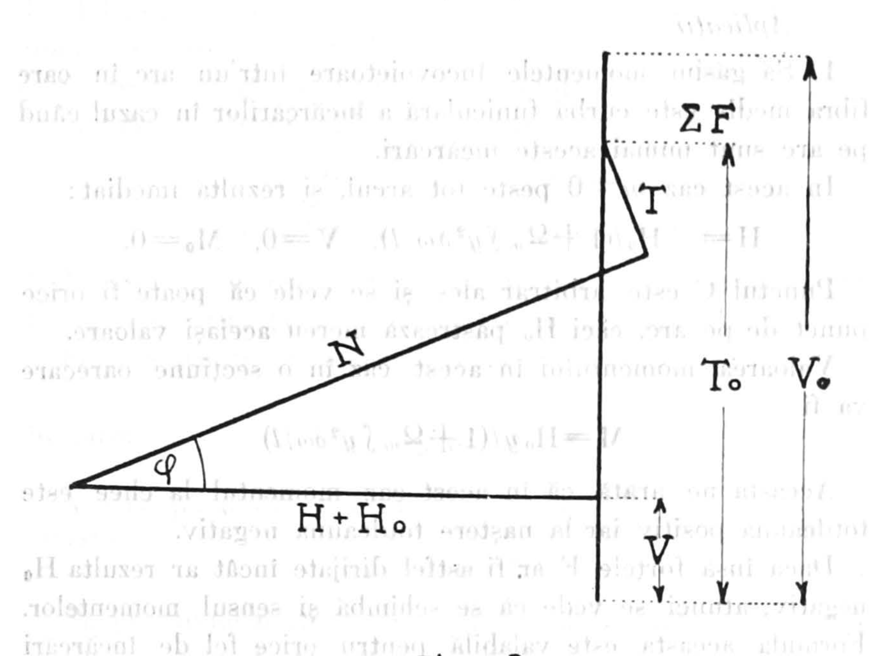


Fig. 3.

Dacă se notează:

$$\partial s / I = \partial\omega, \quad \partial s / \Omega = \partial u,$$

dacă se aleg axele de coordonate așa fel ca:

$$\int y \partial\omega = 0 \quad \int x \partial\omega = 0 \quad \text{și} \quad \int xy \partial\omega = 0,$$

dacă se neglijă ca de obicei termenii:

$$\int (T_0 - V) \sin\varphi \cos\varphi \, \partial u,$$

$$(H + H_0) \int \cos\varphi \sin\varphi \, \partial u,$$

$$\int (T_0 - V) \sin^2\varphi \, \partial u,$$

şi dacă se face aproximaţia:

$$\int \cos^2\varphi \, \partial u = l/\Omega_m$$

se capătă:

$$H = -H_0 (1 - \Omega_m \int my \, \partial\omega / l) / (1 + \Omega_m \int y^2 \partial\omega / l)$$

(1) $$V = H_0 (\int mx \, \partial\omega) / (\int x^2 \, \partial\omega)$$

$$M_0 = H_0 (\int m \, \partial\omega) / (\int \partial\omega).$$

Aplicaţii :

1) Să găsim momentele încovoietoare într'un arc în care fibra medie este curbă funiculară a încărcărilor în cazul când pe arc sunt numai aceste încărcări.

In acest caz $m=0$ peste tot arcul, şi rezultă imediat:

$$H = -H_0 / (1 + \Omega_m \int y^2 \partial\omega / l), \quad V=0, \quad M_0=0.$$

Punctul C este arbitrar ales şi se vede că poate fi orice punct de pe arc, căci H_0 păstrează mereu aceiaşi valoare.

Valoarea momentului în acest caz în o secţiune oarecare va fi:

$$M = H_0 y / (1 + \Omega_m \int y^2 \partial\omega / l)$$

Aceasta ne arată că în acest caz momentul la chee este totdeauna positiv iar la naştere totdeauna negativ.

Dacă însă forţele F ar fi astfel dirijate încât ar rezulta H_0 negativ, atunci se vede că se schimbă şi sensul momentelor. Formula aceasta este valabilă pentru orice fel de încărcări numai dacă condiţia dela început este îndeplinită.

Să presupunem că încărcăm acest arc cu altă serie de încărcări F', şi că am construit un nou poligon funicular, a acestor încărcări cu distanţa polară H'_0, care să treacă iarăşi prin punctele A, C, B. Dacă ordonatele măsurate între axa arcului şi acest nou poligon funicular sunt m' atunci $H_0'm'$ ne va da valoarea momentului produs în o secţie oarecare considerând arcul articulat în cele 3 puncte.

Valoarea celor 3 necunoscute static nedeterminate vor fi date de un grup de ecuaţii similar grupului (1).

Dacă adunăm valorile respective căpătăm împingerea totală H_1, V_1 şi M_1 a cantităţilor static nedeterminate.

$$H_1 = -(H_0 + H'_0 - H'_0 \Omega_m \int m' y \partial\omega / l) / (1 + \Omega_m \int y^2 \partial\omega / l),$$

$$V_1 = H'_0 (\int m' x \partial\omega / \int x^2 \partial\omega)$$
(2)
$$M_1 = H'_0 (\int m' \partial\omega / \int \partial\omega).$$

Aceasta ne permite ca numai cu poligonul funicular a încărcărilor ce se adaugă să găsim cantitățile static nedeterminate cari ne interesează.

2) Să găsim linia de influență a cantităților H, V și M_0 pentru arcul parabolic de deschidere l săgeata f și în care $I = I_0/\cos\varphi$, în care I_0 este momentul la chee, I într'o secțiune oarecare iar φ unghiul tangentei la arc cu orizontala.

Va trebui să găsim centrul de greutate elastic adică originea axelor de coordonate. El este definit de:

$$\int y \partial\omega = 0 \quad \int x \partial\omega = 0 \quad \int xy \partial\omega = 0$$

sau
$$\int y \partial x = 0 \quad \int x \partial x = 0 \quad \int xy \partial x = 0.$$

Aceasta ne dă pentru 0 poziția de pe axa de simetrie verticală și la distanța de $^1/_3\, f$ dela vârful arcului.

Ecuația parabolei raportată la aceste axe este:

$$y = f(^1/_3 - k^2)$$
în care:
$$k = 2x/l.$$

Aceiași parabolă raportată la axa oy și la axa AB are ca ecuație:

$$y' = f(1 - k^2).$$

Să presupunem că avem o forță F la distanța a de axa $0y$. Cu notațiile de mai sus, și notând în plus $2a/l = \alpha$, momentul, considerând grinda AB simplu rezemată în A și B, la stânga și dreapta lui F va avea expresiile:

$$^1/_4 Fl(1-\alpha)(1+k), \quad ^1/_4 Fl(1+\alpha)(1-k);$$

Vom presupune punctul de articulație C chiar în dreptul forței F, atunci poligonul funicular se reduce la dreptele AC și CB.

Momentul în dreptul punctului C are valoarea:

$$M_c = {^1/_4}\, Fl(1-\alpha^2)$$

iar săgeata y' în dreptul aceluiași punct este:

$$y' = f(1-\alpha^2)$$

și deci:
$$H_0 = M_c / y' = Fl/4f.$$

In acest mod ordonatele m la stânga şi la dreapta punctului C vor avea valorile:

$$m = f(1+k)(k-\alpha), \quad m = f(1-k)(\alpha-k)$$

fiecare din aceste expresii fiind valabile numai în intervalele:

$$-1, +\alpha \text{ şi } +\alpha, +1.$$

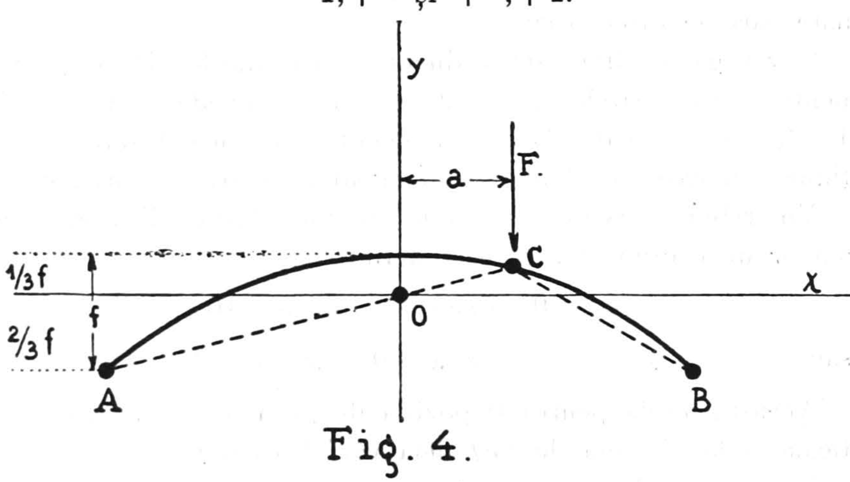


Fig. 4.

Dacă punem:

$$dx = l\, dk/2$$

şi efectuăm integrala $\int m y\, \partial\omega$ în intervalele de mai sus, obţinem:

$$\int m y\, \partial\omega = -(f^2 l/180\, I_0)[1+15\alpha^2(2-\alpha^2)]$$

Dacă ţinem seamă că avem încă

$$\int y^2\, \partial\omega = 4 f^2 l/45\, I_0$$

căpătăm:

$$H = -H_0 \frac{1+15\alpha^2(2-\alpha^2)+180\iota^2/f^2}{16+180\iota^2/f^2}$$

Evident că împingerea totală va fi:

$$H + H_0 = H_0 \frac{15[1-\alpha^2(2-\alpha^2)]}{16+180\iota^2/f^2}$$

din care se vede că ea variază — cu aproximaţiile obişnuite — între zero şi $15 H_0/16$.

Pentru determinarea liniei de influenţă a lui V vom proceda exact ca mai sus şi avem:

$$V = H_0 f \alpha(1-\alpha^2)/l.$$

In mod analog găsim:

$$M_0 = -H_0 f(1/3+\alpha^2)/2.$$